Додатна настава за први разред
30.03.2005.

# Геометрија 2

*Миливоје Лукић*

1. Дат је круг $k$ и тачка $A$ ван њега. Из тачке $A$ су повучене тангенте $AB$ и $AC$ на круг $k$ ($B$, $C \in k$) и права која сече круг у тачкама $M$ и $N$ и праву $BC$ у тачки $P$. Доказати да је
$$\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{NC} = \sqrt{\frac{BP}{PC}}.$$
2. Страна $BC$ троугла $ABC$ додирује уписани круг тог троугла у $D$. Доказати да центар уписаног круга лежи на правој која пролази кроз средишта дужи $BC$ и $AD$.
3. Доказати: ако се дијагонале $AD$, $BE$ и $CF$ тетивног шестоугла $ABCDEF$ секу у једној тачки, онда важи $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.
4. Дат је троугао $ABC$. На његовој страници $BC$ уочавамо тачку $A_1$ на следећи начин: $A_1$ је средиште стране $KL$ правилног петоугла $MKLNP$, чија темена $K$ и $L$ леже на дужи $BC$, $M$ на $AB$ и $N$ на $AC$. Аналогно су на странама $AC$ и $AB$ уочене тачке $B_1$ и $C_1$. Доказати да се праве $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ секу у једној тачки.
5. Нека је $O$ произвољна тачка у равни троугла $ABC$. Нека су $M$ и $N$ подножја нормала из тачке $O$ на унутрашњу и спољну симетралу угла $\angle BAC$. Аналогно дефинишемо $P$ и $Q$ у односу на угао $\angle ABC$, и $R$ и $T$ у односу на угао $\angle BCA$. Доказати да су праве $MN$, $PQ$ и $RT$ конкурентне.
6. (ИМО2000.1) Кругови $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ се секу у $M$ и $N$. Нека је $AB$ права која додирује ове кругове у $M$ и $N$, редом, тако да је $M$ ближе правој $AB$ него $N$. Нека је $C$ тачка на кругу $\Gamma_1$, а $D$ на кругу $\Gamma_2$, тако да је $CD$ права паралелна са $AB$ која пролази кроз $M$. Праве $AC$ и $BD$ се секу у $E$, праве $AN$ и $CD$ у $P$, а праве $BN$ и $CD$ у $Q$. Доказати да је $EP = EQ$.
7. Ако су $d_1$, $d_2$,$\ldots$, $d_{2n+1}$ растојања темена правилног многоугла $A_1A_2\ldots A_{2n+1}$ од тачке $P$ на мањем луку $A_1A_{2n+1}$ круга описаног око тог многоугла. Доказати да је
$$d_1 + d_3 + \cdots + d_{2n+1} = d_2 + d_4 + \cdots + d_{2n}.$$
8. Нека су $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ произвољни углови, такви да је збир било која два од њих мањи од $180^\circ$. На странама троугла $ABC$ са спољне стране су конструисани троуглови $A_1BC$, $AB_1C$ и $ABC_1$, који имају при теменима $A$, $B$, $C$ углове $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Доказати да се праве $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ секу у једној тачки.
9. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. У троуглове $BCD$, $ACD$, $ABD$, $ABC$ су уписани кругови чији су полупречници $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$, редом. Доказати да је $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.
10. (Кинеска теорема о круговима) Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ $n$-тоугао уписан у круг $k$. Извршена је триангулација овог полигона и у тако добијене троуглове су уписани кругови. Доказати да збир полупречника ових кругова не зависи од триангулације.
11. Дат је троугао $ABC$ и тачке $M$ и $N$ на правој $BC$, такве да је $\angle MAN = 90^\circ$ и
$$\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{NC}.$$
Доказати да су $AM$ и $AN$ унутрашња и спољна симетрала угла $\angle BAC$.